Computergrafik 1
Transformationen

Kai Köchy

Sommersemester 2010

Beuth Hochschule für Technik Berlin

Überblick

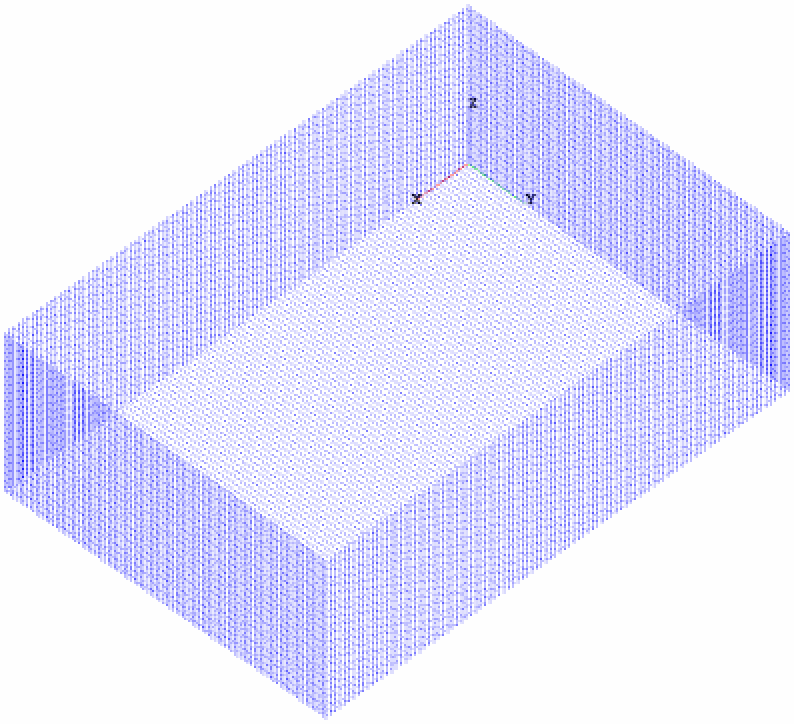
- Repräsentationen, Primitiven
- Transformationen in 2D
  - Skalierung
  - Translation
  - Rotation
  - Scherung
- Koordinaten in 3D
- Transformationen in 3D

Repräsentationen

- Primitiven
  - Punkte
  - Linien
  - Dreiecke
  - Körper
- Positionierung
  - Koordinaten
  - Orientierung

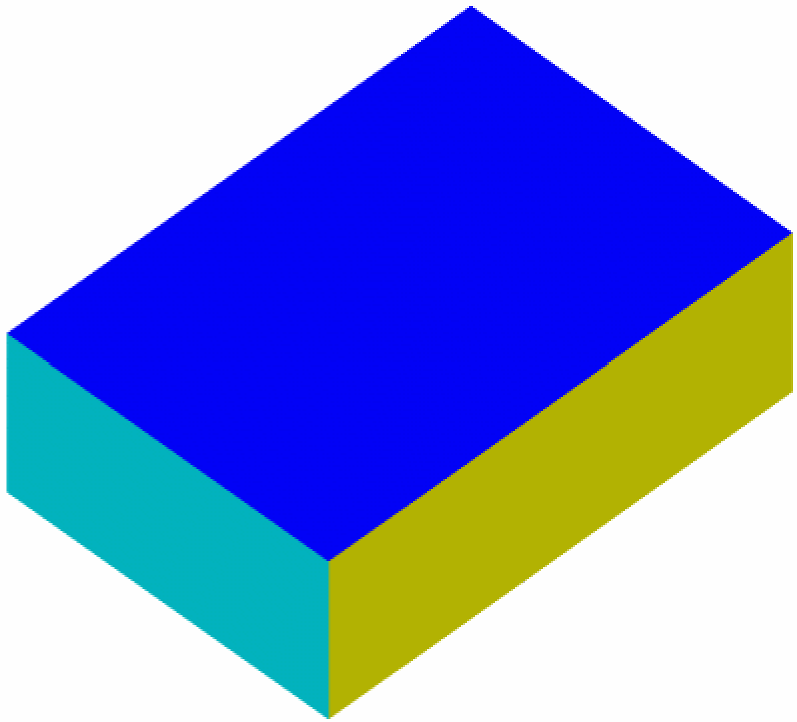
Primitiven

- Punkt-Wolke



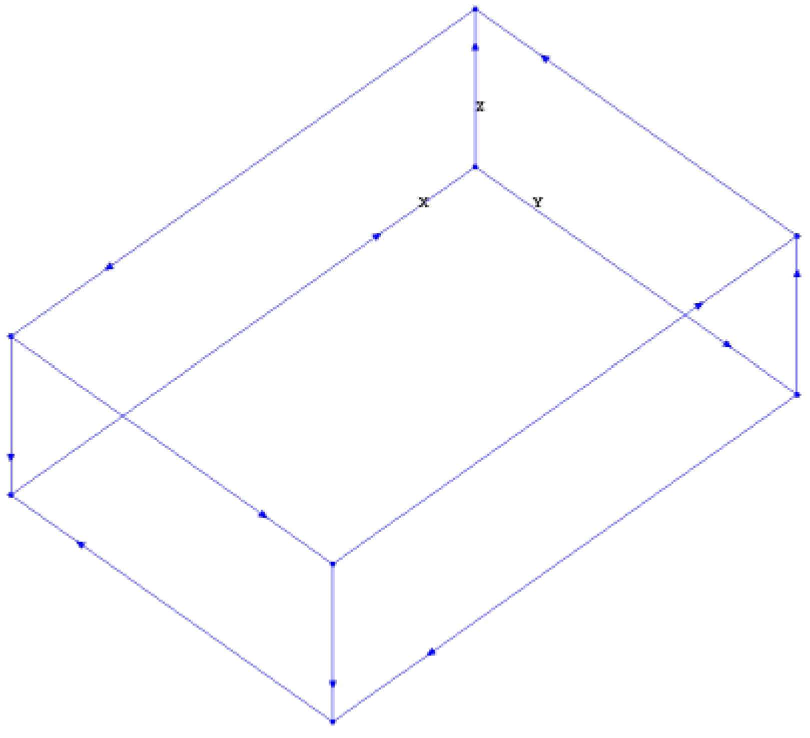
Primitiven

- Flächen-Modell



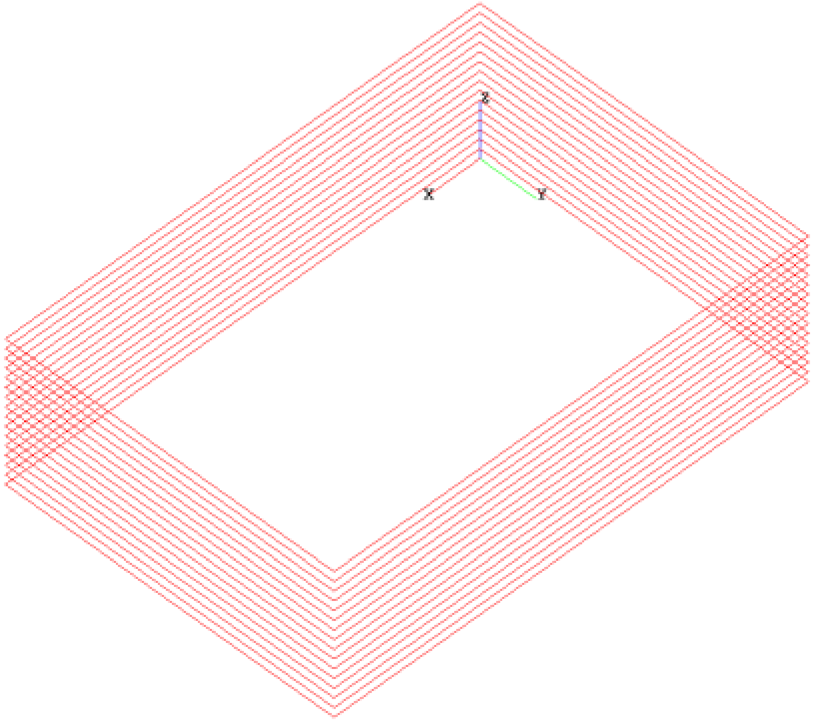
Primitiven

- Kurven-Modell



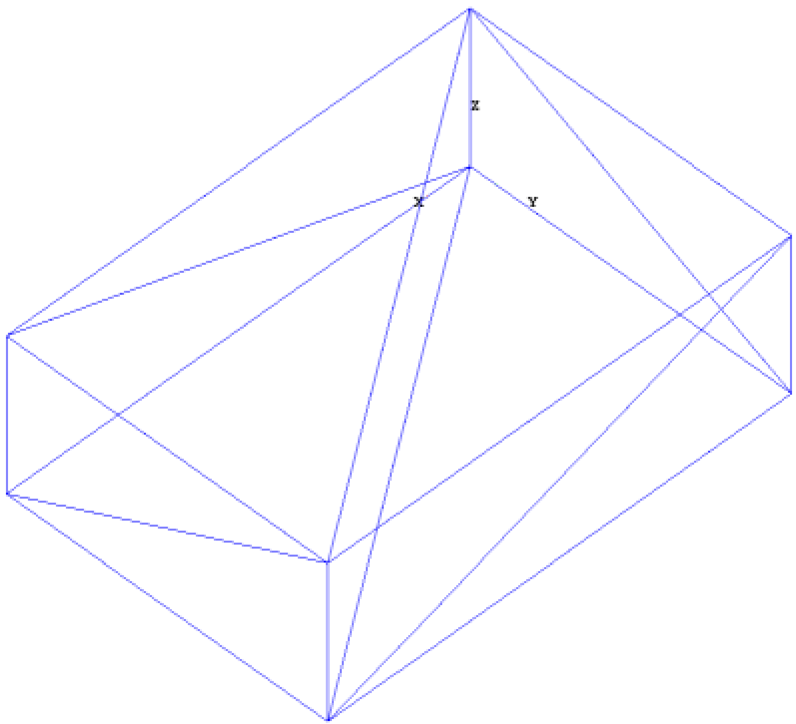
Primitiven

- Slice-Modell



Primitiven

- Facetten-Modell

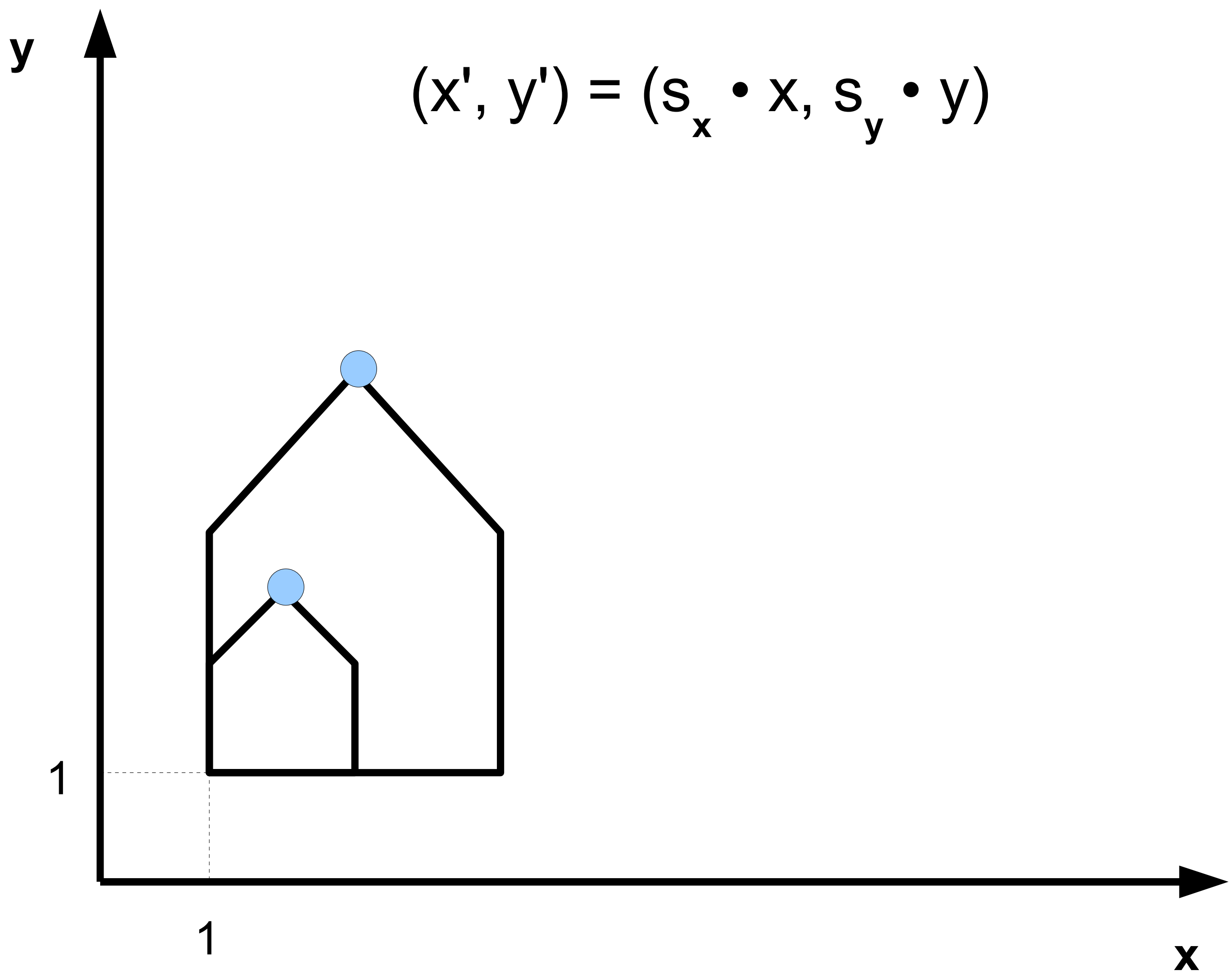


Überblick

- Repräsentationen, Primitiven
- Transformationen in 2D
  - Skalierung
  - Translation
  - Rotation
  - Scherung
- Koordinaten in 3D
- Transformationen in 3D

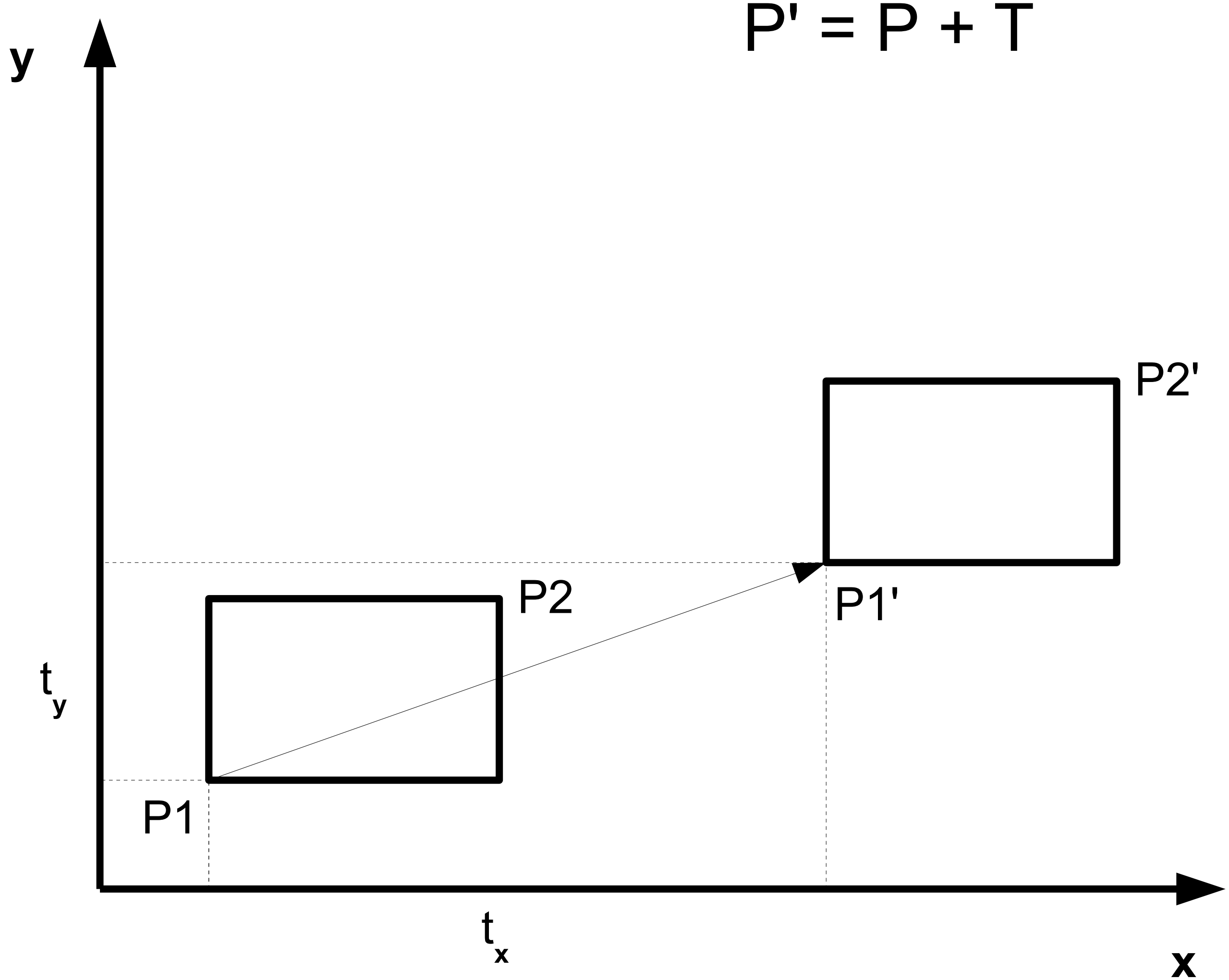
Transformationen
Skalierung

$$(x', y') = (s_x \bullet x, s_y \bullet y)$$



Transformationen
Translation

$$P' = P + T$$

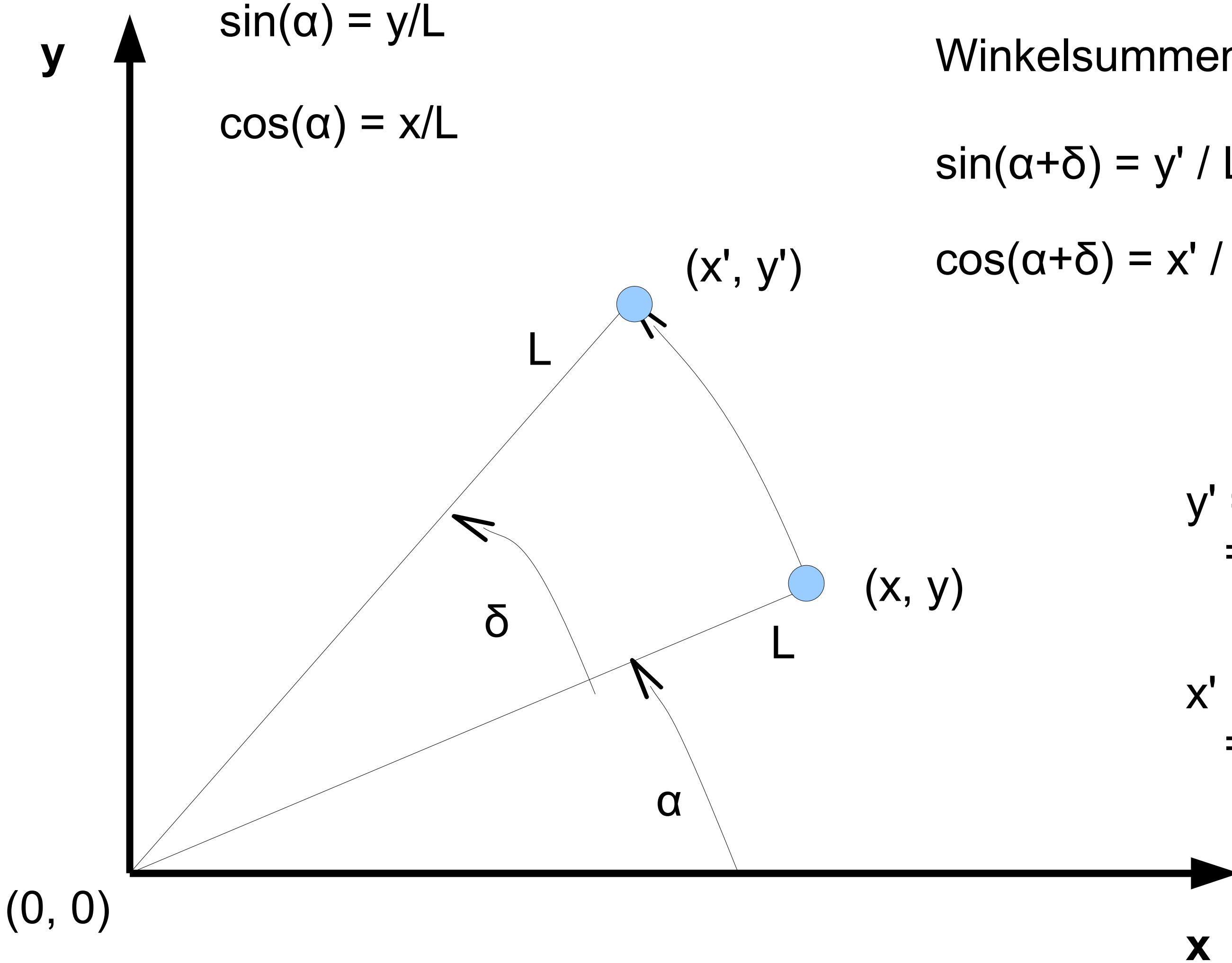


Transformation
Rotation

$L = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\sin(\alpha) = y/L$

$\cos(\alpha) = x/L$



Winkelsummensatz

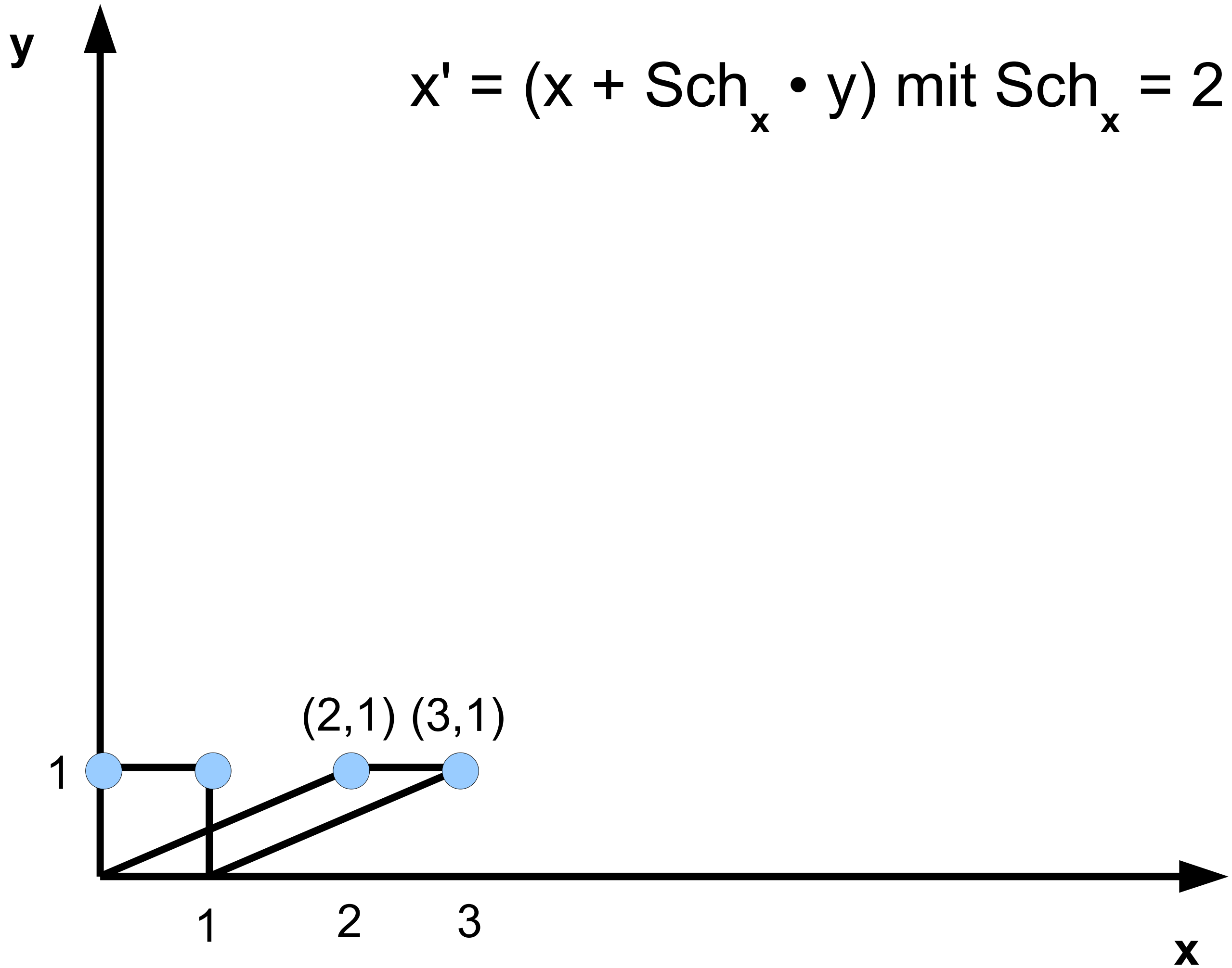
$\sin(\alpha+\delta) = y' / L = \cos(\delta) \sin(\alpha) + \sin(\delta) \cos(\alpha)$

$\cos(\alpha+\delta) = x' / L = \cos(\delta) \cos(\alpha) - \sin(\delta) \sin(\alpha)$

$$y' = L \cos(\delta)\, y/L + L \sin(\delta)\, x/L$$
$$= y \cos(\delta) + x \sin(\delta)$$

$$x' = L \cos(\delta)\, x/L - L \sin(\delta)\, y/L$$
$$= x \cos(\delta) - y \sin(\delta)$$

Transformation
Scherung



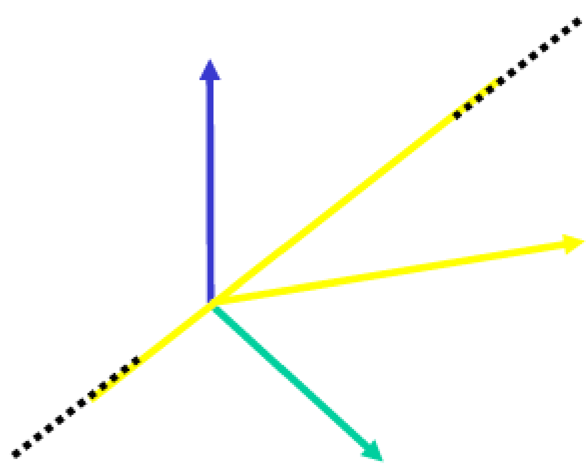
$$x' = (x + Sch_x \cdot y) \text{ mit } Sch_x = 2$$

Koordinaten

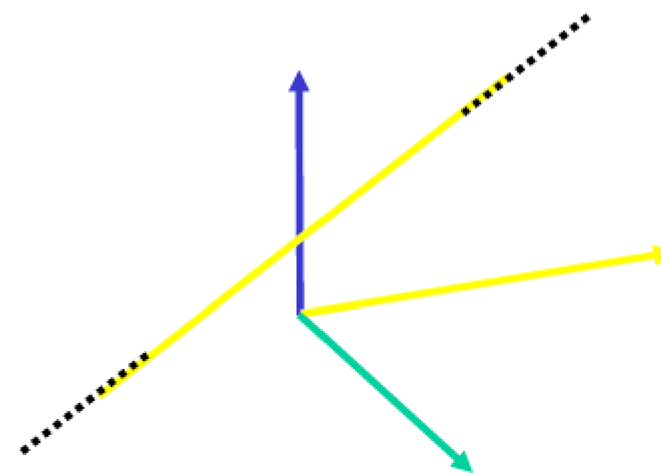
- Verbindet “Zeichenebene” oder “Raum” mit R^2 bzw. R^3
- Koordinatenursprung und –achsen sind problemabhängig
  - Bsp. Rechtwinklige Koordinaten in der unteren Ecke eines Zimmers
- Affine Räume haben
  - keinen festen Ursprung und
  - keine festen Achsen
  - (im Gegensatz zu linearen Räumen)

Koordinaten
Der affine Raum

- Eine Teilmenge X eines Vektorraumes V heißt affiner Unterraum von V
  - falls es ein $\mathbf{v}\in V$ und einen Untervektorraum $W\subset V$ gibt,
  - so dass $X= \mathbf{v}+W=\{\mathbf{u}\in V \mid \text{es gibt ein } \mathbf{w}\in W \text{ mit } \mathbf{u}= \mathbf{v}+\mathbf{w}\}$.
- Eindimensionale Unterräume des R3 sind Geraden, zweidimensionale Unterräume sind Ebenen.



Linearer Unterraum



Affiner Unterraum

Affine Abbildungen
…als lineare Abbildung

- Eine Abbildung Φ: $R^n \rightarrow R^m$ ist genau dann affin,
  - wenn Φ in der Form $\Phi(\mathbf{v})=A(\mathbf{v})+\mathbf{b}$ darstellbar ist,
  - wobei A eine lineare Abbildung und $\mathbf{b} \in R^m$ ist.
- Affine Abbildungen setzen sich aus einer linearen Abbildung (dem multiplikativen Teil) und einer Translation (dem additiven Teil) zusammen.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}}_{\text{Lineare Abb.}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}}_{\text{Translation}}$$

Affine Abbildungen
Matrizenschreibweise

- Affine Abbildungen werden durch homogene (erweiterte) 4 x 4 -Matrizen beschrieben
  - Einheitliche Darstellung => einfache Implementierung
  - Hintereinanderausführung verschiedener Transformationen => nur Multiplikation der Matrizen

Translation

- Translationen sind affine Abbildungen
  - Der lineare Teil einer Translation T ist die Identität
  - Die 4x4-Matrix zur Beschreibung einer Translation um den Vektor $(x0,y0,z0)^t$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x_0 \\ 0 & 1 & 0 & y_0 \\ 0 & 0 & 1 & z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + x_0 \\ y + y_0 \\ z + z_0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Skalierung, Scherung und Rotation

- Die affinen Abbildungen Skalierung, Scherung, Rotation lassen den Ursprung invariant
- Sie besitzen keinen Translationsanteil
- Es sind genau die linearen Transformationen
- 3x3-Matritzen wären ausreichend

Skalierung, Scherung und Rotation

- Homogene Form

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Dabei bestimmen die Bilder der Basisvektoren
  $(1,0,0)^t$, $(0, 1, 0)^t$, $(0, 0, 1)^t$
  eine lineare Abbildung

- Zur Vereinfachung beim Schreiben werden Vektoren im Text transponiert

Skalierung, Scherung und Rotation

- Multipliziert man die Ortsvektoren der Punkte von rechts, so stehen die Bilder der Basisvektoren der linearen Abbildung A in den Spalten der A beschreibenden Matrix.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix}$$

Skalierung

- Eine Skalierung S ergibt für die affinen Basisvektoren folgende Beziehung:
  - $S((1,0,0,)^t) = (s1, 0, 0)^t$
  - $S((0, 1, 0)^t) = (0, s2, 0)^t$
  - $S((0, 0, 1)^t) = (0, 0, s3)^t$.

Skalierung

- Matrix mit homogenen Koordinaten ergibt sich daher zu

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Skalierung

- Der Sonderfall sx= sy= sz= s bedeutet die gleiche Skalierung für alle Koordinaten
- Die zugehörige homogene Matrix hat dann die Form

$$\begin{bmatrix} s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix}$$

Scherung

- Eine Scherung SH ergibt für die affinen Basisvektoren folgende Beziehung
  - $SH((1, 0, 0)^t) = (1, s1, s3)^t$
  - $SH((0, 1, 0)^t) = (s2, 1, s4)^t$
  - $SH((0, 0, 1)^t) = (s5, s6, 1)^t$

Scherung

- Matrix mit homogenen Koordinaten

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & s_2 & s_5 & 0 \\ s_1 & 1 & s_6 & 0 \\ s_3 & s_4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Rotation

- Eine Rotation $R\alpha$ um den Winkel α um die z-Achse in mathematisch positive Richtung ergibt für die affinen Basisvektoren folgende Beziehung:
  - $R\alpha((1, 0, 0)^t) = (\cos \alpha, \sin \alpha, 0)$
  - $R\alpha((0, 1, 0)^t) = (-\sin \alpha, \cos \alpha, 0)$
  - $R\alpha((0, 0, 1)^t) = (0, 0, 1)$

Rotation

- Matrix mit homogenen Koordinaten für die Rotation Rα um die z-Achse

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Rotation

- Bei Rotation Rα um die x- bzw. y-Achse ergeben sich analog folgende homogene Darstellungen.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

x-Achse

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

y-Achse

ENDE

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit